virtuelle hochschule bayern

Universität Augsburg University

UNIVERSITY OF BAMBERG
OTTO-FRIEDRICH-UNIVERSITÄT BAMBERG
S.OTTO PAT.UNIV.BAMBERG

Geodaten – Geoinformation – Geowissen

M2

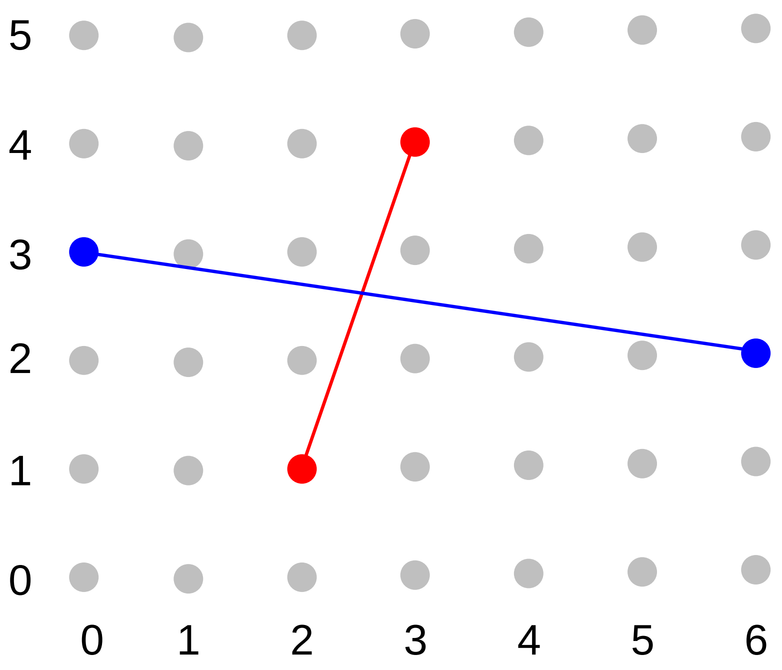
Geoinformatik

3 Geometrische Grundbegriffe: Orientierung

Prof. Dr. Christoph Schlieder

Beschränkte Genauigkeit (2)

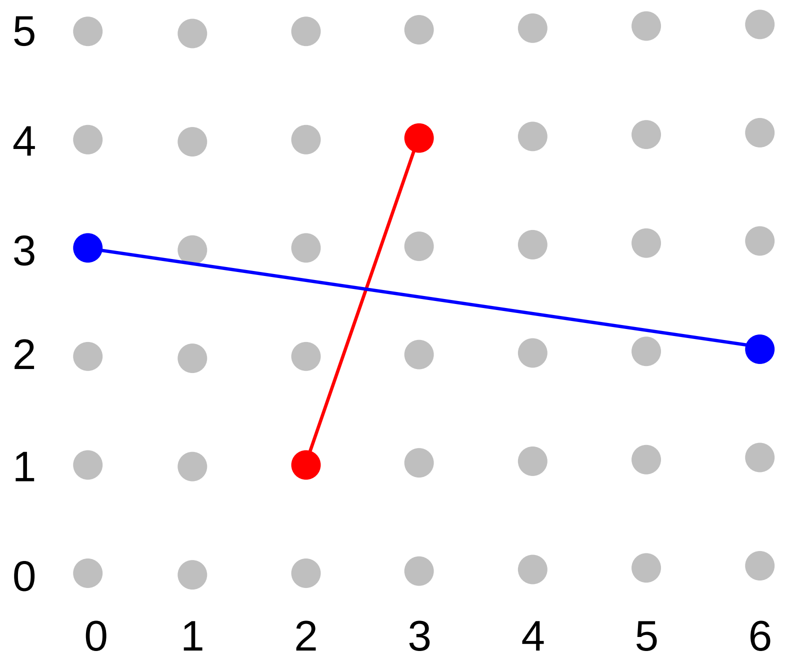
- Integer-Arithmetik
  - Punkte haben Koordinaten, die sich auf Gleichheit prüfen lassen.
  - $equal(p,q) :=$
    $(p_1 = q_1) \land (p_2 = q_2)$



Schnittpunktkoordinaten $\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}\right)$

Beschränkte Genauigkeit (2)

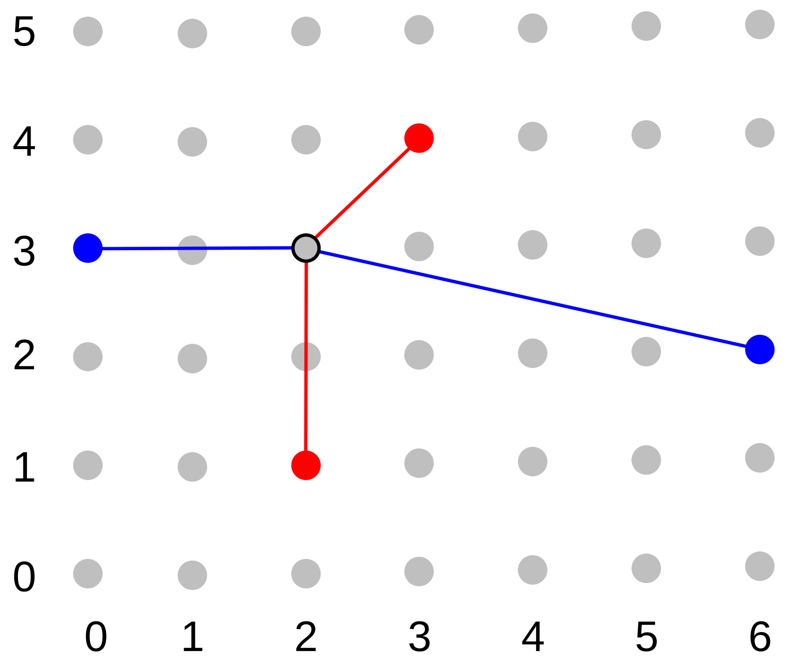
- Integer-Arithmetik
  - Punkte haben Koordinaten, die sich auf Gleichheit prüfen lassen.
  - $equal(p, q) :=$ $(p_1 = q_1) \wedge (p_2 = q_2)$
- Problem
  - Satz über Inzidenz: „Zwei Geraden ... haben einen oder keinen Punkt gemein."
  - Als Schnittpunkte konstruierte Punkte müssen keine Gitterpunkte sein



Schnittpunktkoordinaten $\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}\right)$

Gittergeometrie

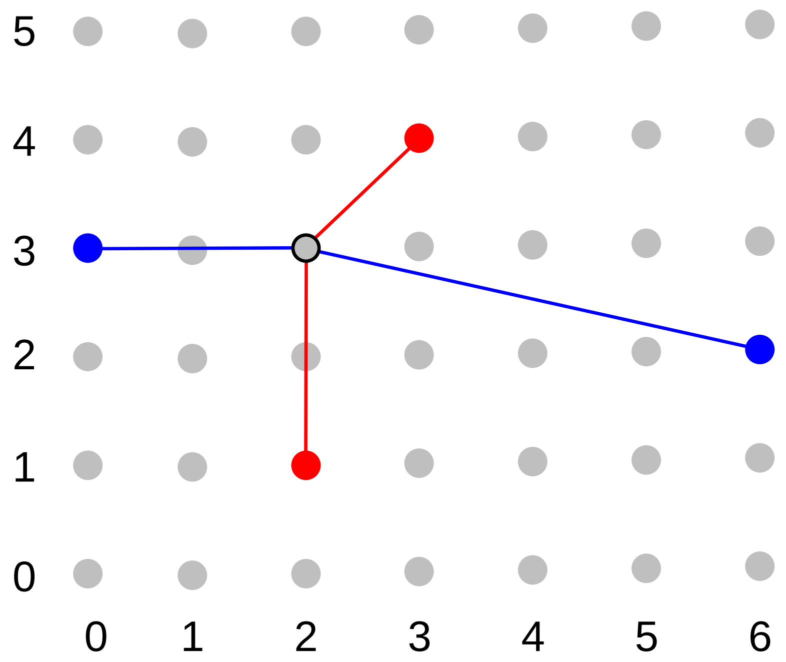
- Einfachste Lösung
  - Neu konstruierte Punkte werden auf den nächsten Gitterpunkt gelegt.



Gitter-Schnittpunkt $(2,3)$

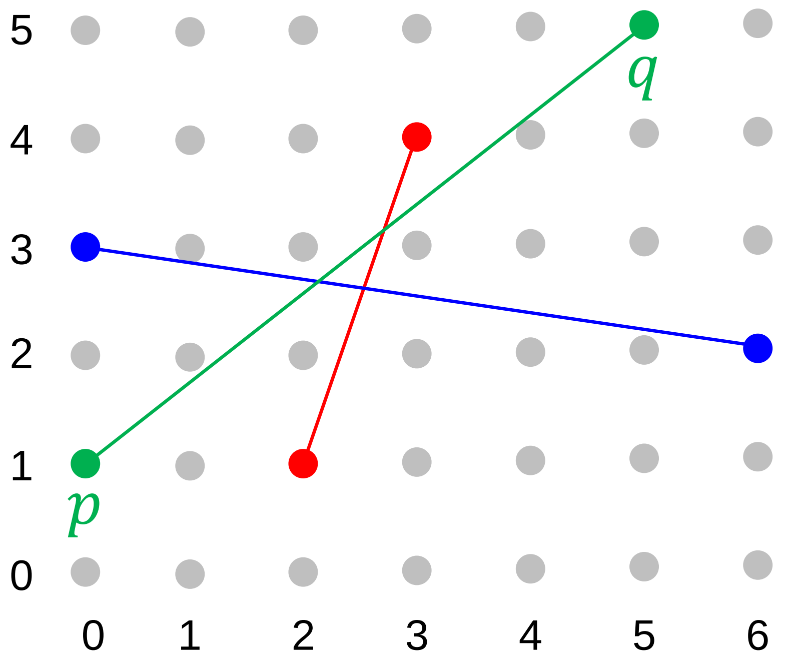
Gittergeometrie

- Einfachste Lösung
  - Neu konstruierte Punkte werden auf den nächsten Gitterpunkt gelegt.
- Problem
  - nicht eindeutig: im Beispiel könnte mit gleichem Fehler $(3,3)$ gewählt werden.
  - Es enstehen geometrisch fehlerhafte Lösungen (EN extraneous solutions)

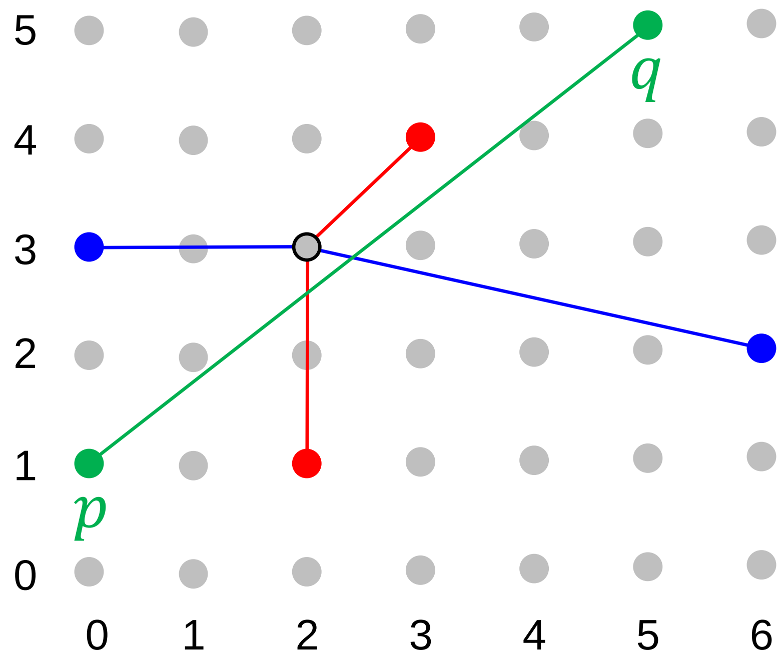


Gitter-Schnittpunkt $(2,3)$

Anordnung von Punkten



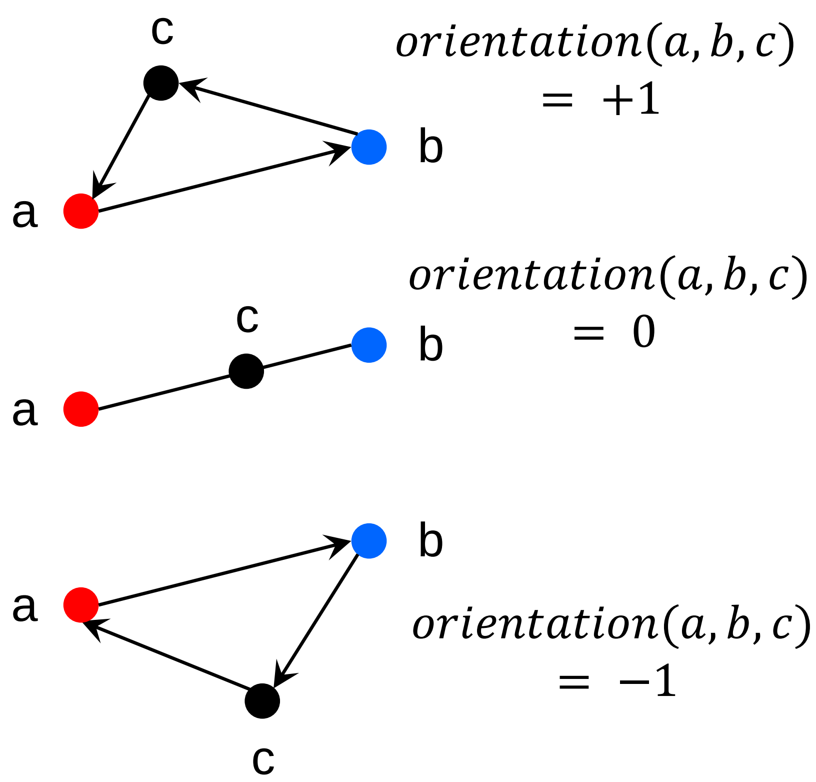
geometrischer Schnittpunkt
liegt rechts der gerichteten Geraden pq



Gitter-Schnittpunkt
liegt links der gerichteten Geraden pq

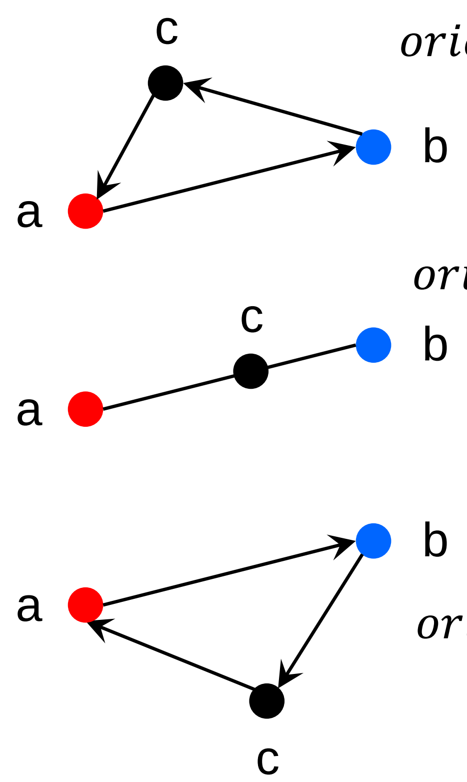
Orientierung in der Ebene

- Definition
  - Die Orientierung eines Punkttripels (*a*,*b*,*c*) ist
  - Positiv: Umlauf *a*→*b* → *c* im Gegenuhrzeigersinn
  - Null: *a*, *b* und *c* kollinear
  - Negativ: Umlauf *a*→*b* → *c* im Uhrzeigersinn



Orientierung in der Ebene

- Definition
  - Die Orientierung eines Punkttripels (*a*,*b*,*c*) ist
  - Positiv: Umlauf *a*→*b* → *c* im Gegenuhrzeigersinn
  - Null: *a*, *b* und *c* kollinear
  - Negativ: Umlauf *a*→*b* → *c* im Uhrzeigersinn
- Notation
  - $orientation(a,b,c)\ =\ +1$ bzw. kurz $[a,b,c]\ =\ +$



$orientation(a,b,c) = +1$

$orientation(a,b,c) = 0$

$orientation(a,b,c) = -1$

Orientierung berechnen

- Definition
  - Seien a, b und c Punkte der Ebene mit den Koordinaten $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ und $c = (c_1, c_2)$.
  - Die Orientierung des Tripels (a, b, c) ist das Vorzeichen der Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

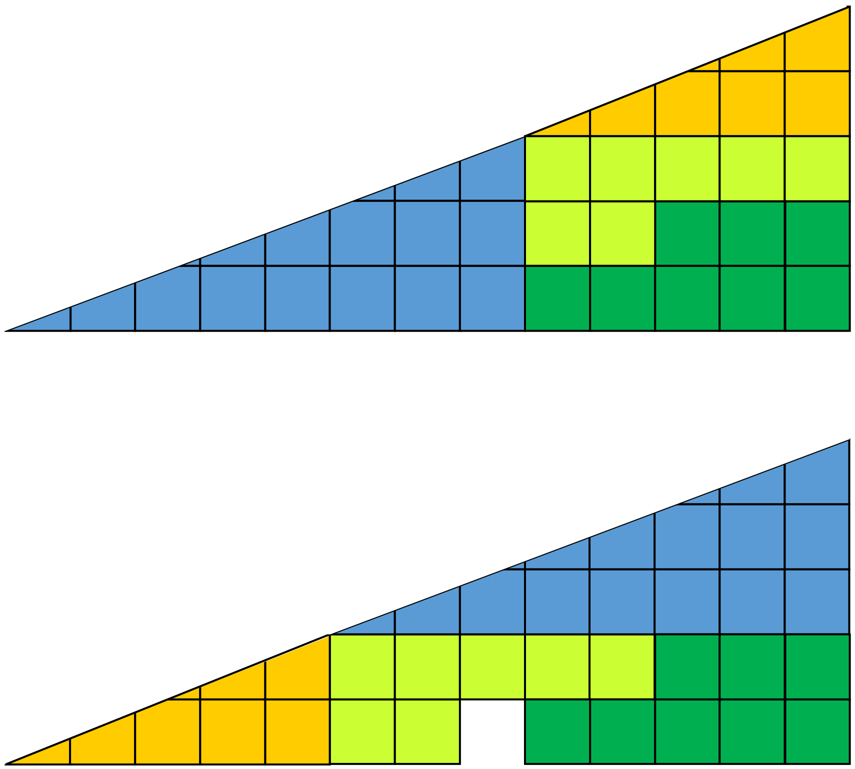
$$a_1 b_2 + b_1 c_2 + c_1 a_2$$
$$-c_1 b_2 - b_1 a_2 - a_1 c_2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 0 > 0$$

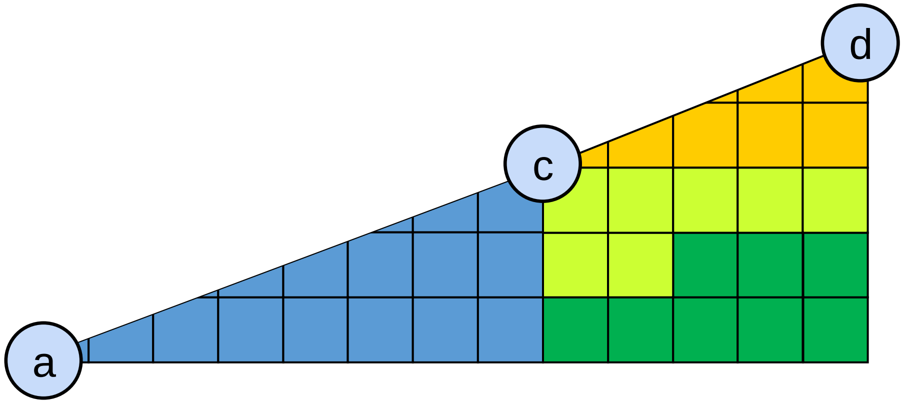
Die Anschauung kann trügen

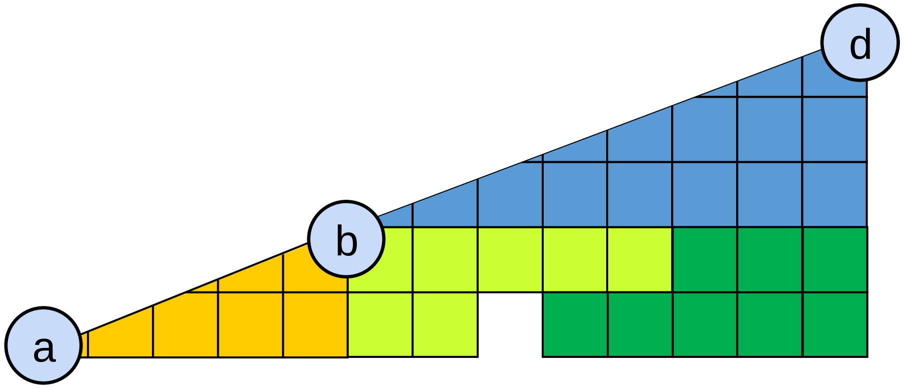
- Ein Puzzle
  - Nebenstehendes Puzzle besteht aus vier Teilfiguren.
  - Werden sie anderes angeordnet, dann scheint ein Quadrat zu fehlen.
  - Wie ist es verloren gegangen?
  - Die Teilfiguren der oberen und unteren Figur sind deckungsgleich!



Mit Orientierungen überprüfen

- Orientierung
  - Berechnen und vergleichen Sie die Orientierung von (a,c,d) und (a,b,d), wobei a = (0,0), b = (5,2), c = (8,3) d = (13,5)
  - Welche Werte haben Sie erwarten? Welche errechnet? Was folgt daraus?





Ergebnis

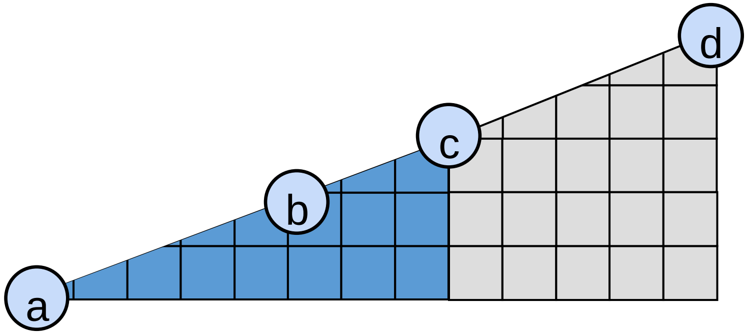
- Kein Dreieck
  - Beide Orientierungen sind von null verschieden, d.h. weder a, c und d noch a, b und d liegen auf einer Geraden. Die Figur bildet also kein Dreick.
  - Wegen $(a, c, d) \; > \; 0$ ist die „Hypothenuse“ der Ausgangsfigur nach innen gebeult

$$[a, c, d] = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 13 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot 5 - 3 \cdot 13 = 1 > 0$$

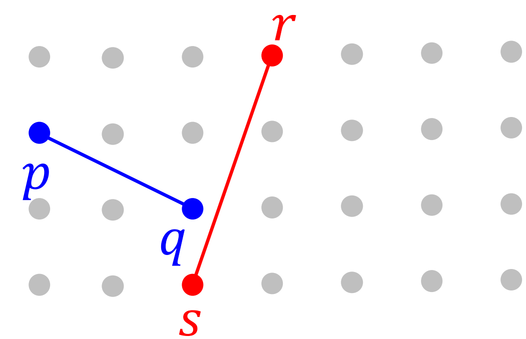
$$[a, b, d] = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 13 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot 5 - 2 \cdot 13 = -1 < 0$$

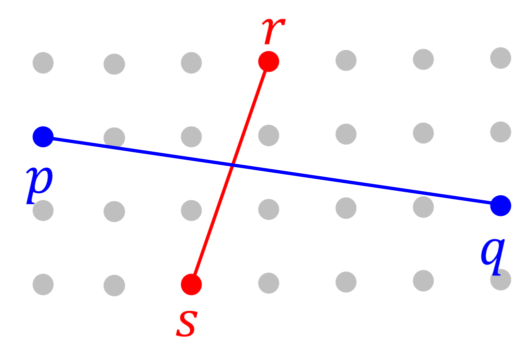


Orientierungen verwenden

- Aufgabe
  - Feststellen, ob sich zwei gegebene Strecken pq und rs schneiden.
  - Der Schnittpunkt muss nicht berechnet werden.



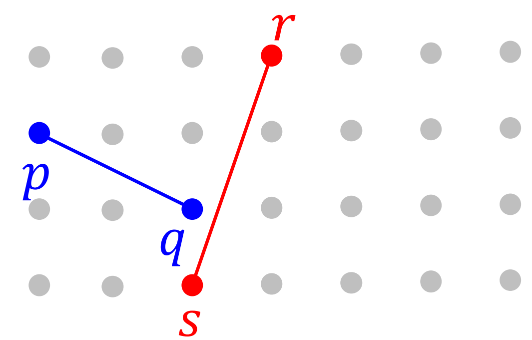
$[pqr] \neq [pqs] \land [rsp] = [rsq]$



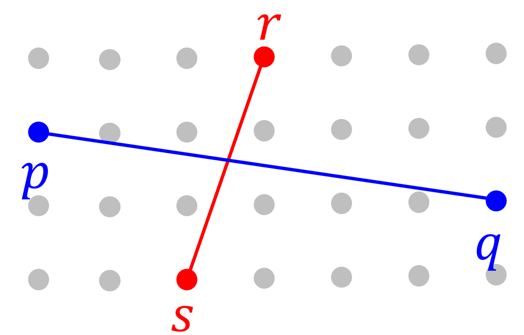
$[pqr] \neq [pqs] \land [rsp] \neq [rsq]$

Orientierungen verwenden

- Aufgabe
  - Feststellen, ob sich zwei gegebene Strecken pq und rs schneiden.
  - Der Schnittpunkt muss nicht berechnet werden.
- Lösung
  - r und s müssen auf verschiedenen Seiten von pq liegen, p und q auf verschiedenen Seiten von rs
  - $[pqr] \neq [pqs] \wedge [rsp] \neq [rsq]$



$[pqr] \neq [pqs] \wedge [rsp] = [rsq]$



$[pqr] \neq [pqs] \wedge [rsp] \neq [rsq]$